Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 8

Abgabe: Freitag, den 22. Dezember 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Beweismechanikaufgabe *(4 Punkte)*

Was ist laut Definition der linearen Unabhängigkeit jeweils zu zeigen, um die folgenden Aussagen (i) und (ii) zu beweisen? Gib dies jeweils explizit an und beweise dann jeweils diese Aussage.

(i) Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $u, v, w \in V$ linear unabhängige Vektoren. Dann sind auch die Vektoren $u+v, v+w, w+u$ linear unabhängig.

(ii) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 genau dann linear unabhängig, wenn die reellen Zahlen a, b, c paarweise verschieden sind.

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form b1blattx-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie x durch die Nummer des Übungsblattes, ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten I“ online unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe – Vorlesung Lineare Algebra I“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 8.1 *(3+2+1 Punkte)*

Es sei W der durch die Vektoren

$$\alpha_1 := (1,2,2,1), \quad \alpha_2 := (0,2,0,1), \quad \alpha_3 := (-2,0,-4,3)$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Außerdem seien

$$\alpha'_1 := (1,0,2,0), \quad \alpha'_2 := (0,2,0,1), \quad \alpha'_3 := (0,0,0,3).$$

Wir setzen $\mathcal{B} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\mathcal{B}' := (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von W sind.
(b) Sei $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$ beliebig. Bestimmen Sie $[\beta]_{\mathcal{B}}$, d.h. die Koordinaten-Spaltenmatrix von β bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B}$.
(c) Finden Sie eine Matrix $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, so dass $[\beta]_{\mathcal{B}} = P[\beta]_{\mathcal{B}'}$.

Aufgabe 8.2 *(1.5+1.5 Punkte)*

Sei K ein Körper, V ein drei-dimensionaler K-Vektorraum und $\alpha, \beta, \gamma \in V$ linear unabhängig über K. Wir betrachten die **geordneten Basen**

$$\mathcal{B}_1 := (\alpha, \beta, \gamma), \quad \mathcal{B}_2 := (\beta, \alpha, \gamma), \quad \mathcal{B}_3 := (\beta, \gamma, \alpha).$$

Sei nun $v \in V$ beliebig.

(a) Finden Sie eine Matrix $P \in M_{3\times 3}(K)$, so dass $[v]_{\mathcal{B}_1} = P[v]_{\mathcal{B}_2}$.
(b) Finden Sie eine Matrix $P \in M_{3\times 3}(K)$, so dass $[v]_{\mathcal{B}_1} = P[v]_{\mathcal{B}_3}$.

Aufgabe 8.3 *(3 Punkte)*

Wir betrachten die 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Zeilenraumes W von A.